Restrictions et prolongements en lien avec la continuité - Annexe sur les espaces uniformes

Adrien Guénard

adrien.guenard@free.fr

0 Introduction

Les définitions concernant les restrictions, les prolongements et la continuité ont été vues dans la partie principale de l'article. Nous abordons ici les questions liées à la continuité uniforme, dans le cadre des espaces uniformes. La partie 1 regroupe les définitions et propriétés générales. La partie 2 donne différents exemples.

1 Définitions et rappels

1.1 Structures uniformes

Notations. Soit E un ensemble non vide. On note Δ_E, ou plus simplement Δ s'il n'y a pas d'ambiguïté, la diagonale de $E \times E$ définie par $\Delta = \{ (x,x) \mid x \in E \}$. Pour toute partie non vide U de $E \times E$, on note $U^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y) \in U \}$. Pour tout couple (U,V) de parties de $E \times E$, on note

$$U \circ V = \{ (x,z) \in E \times E \mid \exists y \in E, ((x,y) \in U \text{ et } (y,z) \in V) \} .$$

Pour tout $x \in E$ et tout $U \subset E \times E$, on note $U[x] = \{ y \in E \mid (x,y) \in U \}$.

Définition. Soit E un ensemble. On appelle ***structure uniforme*** sur E tout ensemble $\mathfrak{U}$ de parties de $E \times E$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\forall U \in \mathfrak{U}, \forall B \subset E \times E, U \subset B \implies B \in \mathfrak{U}$.

(ii) Toute intersection finie d'éléments de $\mathfrak{U}$ appartient à $\mathfrak{U}$.

(iii) $\forall U \in \mathfrak{U}, \Delta_E \subset U$.

(iv) $\forall U \in \mathfrak{U}, U^{-1} \in \mathfrak{U}$.

(v) $\forall U \in \mathfrak{U}, \exists V \in \mathfrak{U}, V \circ V \subset U$.

La seule structure uniforme sur $\emptyset$ est $\{\emptyset\}$. On appelle ***espace uniforme*** tout couple $(E, \mathfrak{U})$, où E est un ensemble et où $\mathfrak{U}$ est une structure uniforme sur E. Les éléments d'une structure uniforme sont appelés les ***entourages*** de cette structure. On appelle ***système fondamental d'entourages*** d'une structure uniforme $\mathfrak{U}$ sur un ensemble E toute partie $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{U}$ telle que tout élément de $\mathfrak{U}$ inclue un élément de $\mathfrak{B}$.
Si E est un espace uniforme de structure uniforme $\mathfrak{U}$, il existe une unique topologie $\mathfrak{T}$ sur E pour laquelle, pour tout $x \in E$, $\mathfrak{V}(x) = \{ V[x] \mid V \in \mathfrak{U} \}$ soit le filtre des voisinages de x pour la topologie $\mathfrak{T}$. On dit que $\mathfrak{T}$ est la ***topologie déduite*** *de la structure uniforme* $\mathfrak{U}$.

Exemple. Soit (X,d) un espace métrique. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $U_\varepsilon = \left\{ (x,y) \in X^2 \;\middle|\; d(x,y) < \varepsilon \right\}$. Alors $\mathfrak{B} = \{ U_\varepsilon \mid \varepsilon > 0 \}$ est un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme $\mathfrak{U}$ dite ***structure uniforme associée à la distance*** d.

Théorème. *Soit $(X, \mathfrak{T})$ un espace topologique compact (donc séparé). Il existe une unique structure uniforme $\mathfrak{U}$ sur X telle que $\mathfrak{T}$ soit la topologie déduite de cette structure uniforme. Cette structure uniforme est l'ensemble des voisinages de Δ dans $X \times X$.*

1.2 Applications uniformément continues

Soient $(E, \mathfrak{U})$ et $(F, \mathfrak{V})$ deux espaces uniformes, et f une application de E dans F. On dit que f est ***uniformément continue*** si, pour tout entourage $V \in \mathfrak{V}$, il existe un entourage $U \in \mathfrak{U}$ tel que, pour tout $(x,y) \in U$, on ait $(f(x), f(y)) \in V$. Si $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ sont des systèmes fondamentaux d'entourages de respectivement $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$, f est uniformément continue si et seulement si pour tout $C \in \mathfrak{C}$, il existe $B \in \mathfrak{B}$ tel que, pour tout $(x,y) \in B$, on ait $(f(x), f(y)) \in C$.
Toute application uniformément continue f de $(E, \mathfrak{U})$ dans $(F, \mathfrak{V})$ est continue pour les topologies déduites des structures uniformes $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$.

Exemple. Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques, et soient $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ les structures uniformes associées respectivement à d et à δ. Puisque

$$\mathfrak{B} = \left\{ \left\{ (x,y) \in X^2 \;\middle|\; d(x,y) < \eta \right\} \;\middle|\; \eta \in \mathbb{R}_+^* \right\} \text{ et } \mathfrak{C} = \left\{ \left\{ (x,y) \in Y^2 \;\middle|\; \delta(x,y) < \varepsilon \right\} \;\middle|\; \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$

sont des systèmes fondamentaux d'entourages de respectivement $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$, une application f de X dans Y est uniformément continue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in X^2$, l'inégalité $d(x,y) < \eta$ implique $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$. On retrouve ainsi la définition élémentaire de la continuité uniforme.

Théorème. *Soient $(X, \mathfrak{T})$ un espace topologique compact, $(Y, \mathfrak{V})$ un espace uniforme et f une application continue de X dans Y. Alors f est uniformément continue.*

Bien entendu, on considère que X est muni de l'unique structure uniforme dont $\mathfrak{T}$ est la topologie déduite.

2 Continuité, continuité uniforme, restrictions et prolongements

2.1 Restrictions d'applications uniformément continues

Soient $(X, \mathfrak{U})$ un espace uniforme et A une partie de X. On rappelle que la ***structure uniforme induite*** par $\mathfrak{U}$ sur A, notée $\mathfrak{U}_{\|A}$ est la structure uniforme sur A définie par $\mathfrak{U}_{\|A} = \{\, U \cap (A \times A) \mid U \in \mathfrak{U} \,\}$.

Théorème — Restriction des applications uniformément continues. *Soient $(E, \mathfrak{U})$ et $(F, \mathfrak{V})$ deux espaces uniformes, A une partie de E, B une partie de F et f une application uniformément continue de $(E, \mathfrak{U})$ dans $(F, \mathfrak{V})$.*

- *$f_{|A}$ est une application uniformément continue de $\left(A, \mathfrak{U}_{\|A}\right)$ dans $(F, \mathfrak{V})$.*
- *Si $f(E) \subset B$, considérée comme une application de E dans B, f est une application uniformément continue de $(E, \mathfrak{U})$ dans $\left(B, \mathfrak{V}_{\|B}\right)$.*

2.2 Continuité uniforme de restrictions et continuité uniforme de fonctions

Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques, A et B deux parties de X, et f une application continue de X dans Y. Si $f_{|A}$ et $f_{|B}$ sont uniformément continues, est-ce que $f_{|A \cup B}$ est uniformément continue ?
Non ! Comme premier exemple, considérons $X = [-1, 0[\cup]0, 1]$ et $\mathbb{1}_{[-1,0[}$. Cette application est continue sur X. En outre, les restrictions de $\mathbb{1}_{[-1,0[}$ à $[-1, 0[$ et à $]0, 1]$ sont constantes donc uniformément continues, mais $\mathbb{1}_{[-1,0[}$ n'est pas uniformément continue sur X. En effet, prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout couple (x, y) d'éléments de X tel que $|x-y| < \eta$, on ait $\left|\mathbb{1}_{[-1,0[}(x) - \mathbb{1}_{[-1,0[}(y)\right| < \frac{1}{2}$. Considérons $x = \frac{-\eta}{3}$ et $y = \frac{\eta}{3}$. Alors $|x - y| = \frac{2}{3}\eta < \eta$, et $\left|\mathbb{1}_{[-1,0[}(x) - \mathbb{1}_{[-1,0[}(y)\right| = 1 > \frac{1}{2}$, ce qui montre que la fonction n'est pas uniformément continue.
Dans l'exemple précédent, X n'est pas connexe, et les parties A et B sont disjointes. Voici à présent un exemple d'espace X connexe, avec $A \cup B = X$, et $A \cap B$ d'intérieur non vide.
Considérons $X = S^1 \setminus \{-1\} = \left\{\, \mathrm{e}^{i\theta} \mid \theta \in]-\pi, \pi[\,\right\}$, et soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ \mathrm{e}^{i\theta} & \mapsto & \theta \end{array} \right.$. Soient $A = \left\{\, \mathrm{e}^{i\theta} \mid -\pi < \theta \leqslant \frac{\pi}{4} \,\right\}$ et $B = \left\{\, \mathrm{e}^{i\theta} \mid -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta < \pi \,\right\}$. Alors f est continue, $f_{|A}$ et $f_{|B}$ sont uniformément continues, mais f n'est pas uniformément continue.

2.3 Prolongements d'applications uniformément continues — Espaces complets [1]

Définitions. Soient E un ensemble non vide et $\mathcal{F}$ un ensemble non vide de parties non vides de E. On dit que $\mathcal{F}$ est un ***filtre*** si toute partie de E incluant un élément de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$ et si toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$. Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique, $x \in E$ et $\mathcal{F}$ un filtre de E. Alors l'ensemble $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de x dans E est un filtre. En outre, on dit que x est un ***point limite*** de $\mathcal{F}$, ou que $\mathcal{F}$ converge vers x, si $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{F}$.

Définitions. Soient $(E, \mathfrak{U})$ un espace uniforme et $\mathcal{F}$ un filtre de E. On dit que $\mathcal{F}$ est un ***filtre de Cauchy*** de E si pour tout entourage $V \in \mathfrak{U}$ il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $F \times F \subset V$. On dit que E est ***complet*** si tout filtre de Cauchy de E converge. Tout sous-espace fermé d'un espace complet est complet. Tout sous-espace complet d'un espace séparé est fermé.

Théorème — Prolongements des applications uniformément continues. *Soient $(E, \mathfrak{U})$ un espace uniforme, A une partie dense de E, $(F, \mathfrak{V})$ un espace uniforme séparé complet, et f une application uniformément continue de $\left(A, \mathfrak{U}_{\|A}\right)$ dans $(F, \mathfrak{V})$. Alors, f admet un unique prolongement par continuité $\overline{f}$, de E dans F. En outre, $\overline{f} : (E, \mathfrak{U}) \to (F, \mathfrak{V})$ est uniformément continue (donc continue).*

2.4 Retour sur les exemples de la section 7 de l'article

Nous avons vu dans la section 7 deux exemples de restrictions de prolongements en lien avec la continuité uniforme. Nous avions interprété les exemples en termes de distances. Nous allons reprendre ces exemples, en termes de structures uniformes. Voici les deux raisonnements concernés :

- « Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possédant des limites finies en $-\infty$ et en $+\infty$. Alors f se prolonge par continuité à $\overline{\mathbb{R}}$ qui est compact. Ce prolongement $\overline{f}$ est donc une application uniformément continue, et il en est de même de sa restriction à $\mathbb{R}$, f. »

- « La fonction exponentielle, exp, tend vers 0 en $-\infty$, vers $+\infty$ en $+\infty$. On peut donc la prolonger par continuité en $-\infty$ et en $+\infty$, et comme $\overline{\mathbb{R}}$ est régulier, ce prolongement par continuité est continu. Notons $\overline{\exp}$ ce prolongement :
$$\overline{\exp} : \left\{ \begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{R}} & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = -\infty \\ \mathrm{e}^x & \text{si } x \in \mathbb{R} \\ +\infty & \text{si } x = +\infty \end{cases} \end{array} \right. .$$
Puisque $\overline{\mathbb{R}}$ est compact, $\overline{\exp}$ est uniformément continue, et donc, en tant que restriction de $\overline{\exp}$ à $\mathbb{R}$, exp est uniformément continue. »

Ces deux raisonnements font appel à un prolongement continu d'une fonction à $\overline{\mathbb{R}}$. Puisque cet espace est compact, il n'y a qu'une seule structure uniforme compatible avec sa topologie. Notons-la $\mathfrak{U}$. Quand on revient à $\mathbb{R}$, en considérant la restriction du prolongement, la continuité uniforme est relative à la structure uniforme $\mathfrak{U}_{\|\mathbb{R}}$ induite sur $\mathbb{R}$ par la structure uniforme $\mathfrak{U}$ de $\overline{\mathbb{R}}$. Or dans les deux énoncés ci-dessus, comme on ne précise pas pour quelle structure uniforme il y a continuité uniforme, cela sous-entend que la continuité uniforme est relative à la structure uniforme habituelle $\mathfrak{H}$ de $\mathbb{R}$. Nous avons vu dans l'article que $\mathfrak{U}$ peut être définie par la distance
$$d : \left\{ \begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{R}}^2 & \to & \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ (x,y) & \mapsto & \left|\overline{\arctan}(x) - \overline{\arctan}(y)\right| \end{array} \right. ,$$
où $\overline{\arctan}$ est le prolongement par continuité à $\overline{\mathbb{R}}$ de arctan, défini par
$$\overline{\arctan} : \left\{ \begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{R}} & \to & \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{-\pi}{2} & \text{si } x = -\infty \\ \arctan(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = +\infty \end{cases} \end{array} \right. .$$
Un système fondamental d'entourages de $\mathfrak{U}$ est
$$\mathfrak{B} = \left\{ \left\{ (x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2 \;\middle|\; d(x,y) < \eta \right\} \;\middle|\; \eta \in \left]0, \pi\right] \right\}.$$
Par comparaison, un système fondamental d'entourages de la structure uniforme habituelle $\mathfrak{H}$ de $\mathbb{R}$ est
$$\mathfrak{C} = \left\{ \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x-y| < \varepsilon \right\} \;\middle|\; \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \right\}.$$
Pour comprendre la différence, voici une représentation de ces entourages (à gauche $\mathfrak{B}$, à droite $\mathfrak{C}$).

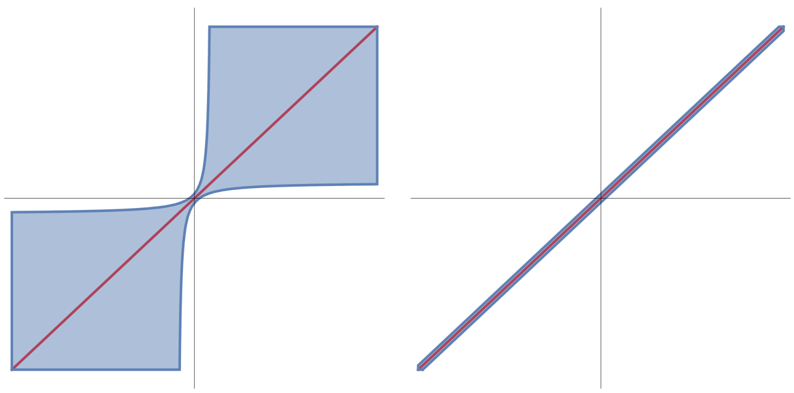

FIGURE 1 – Entourages de $\mathfrak{B}$ et de $\mathfrak{C}$

Tout élément de $\mathfrak{B}$ appartient à $\mathfrak{H}$. On a donc $\mathfrak{U}_{\|\mathbb{R}} \subset \mathfrak{H}$. Voyons en détail les conséquences de cette inclusion.

- Dans le premier raisonnement, la fonction f et son prolongement par continuité sont toutes les deux à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a donc successivement la continuité uniforme de $\overline{f}$ en tant qu'application de $\left(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{U}\right)$ dans $(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$, puis la continuité uniforme de f en tant qu'application de $\left(\mathbb{R}, \mathfrak{U}_{\|\mathbb{R}}\right)$ dans $(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$. Soit $V \in \mathfrak{H}$. Puisque f est une application uniformément continue de $\left(\mathbb{R}, \mathfrak{U}_{\|\mathbb{R}}\right)$ dans $(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$, il existe un entourage

$U \in \mathfrak{U}_{\|_{\mathbb{R}}}$ tel que, pour tout $(x,y) \in U$, on ait $(f(x), f(y)) \in V$. Comme $\mathfrak{U}_{\|_{\mathbb{R}}} \subset \mathfrak{H}$, cet entourage U est également un entourage de $\mathfrak{H}$. Ainsi, f est bien uniformément continue en tant qu'application de $(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$ dans $(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$, ce qui démontre la propriété attendue.

- Considérons à présent le deuxième raisonnement. Soit $V \in \mathfrak{U}_{\|_{\mathbb{R}}}$. Puisque exp est une application uniformément continue de $\left(\mathbb{R}, \mathfrak{U}_{\|_{\mathbb{R}}}\right)$ dans $\left(\mathbb{R}, \mathfrak{U}_{\|_{\mathbb{R}}}\right)$, il existe un entourage $U \in \mathfrak{U}_{\|_{\mathbb{R}}}$ tel que, pour tout $(x,y) \in U$, on ait $(f(x), f(y)) \in V$. Comme $\mathfrak{U}_{\|_{\mathbb{R}}} \subset \mathfrak{H}$, cet entourage U est également un entourage de $\mathfrak{H}$. Ainsi, exp est une application uniformément continue de $(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$ dans $\left(\mathbb{R}, \mathfrak{U}_{\|_{\mathbb{R}}}\right)$. Bien sûr, ce n'est pas une application uniformément continue de $(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$ dans $(\mathbb{R}, \mathfrak{H})$.

2.5 Un exemple de prolongement : prolongement de sinus

Notons δ la distance euclidienne de $\mathbb{R}^2$. Soit σ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$x \mapsto \begin{cases} (x, -\pi) & \text{si } -\pi \leqslant x \leqslant \pi \\ (-\pi, -2\pi - x) & \text{si } -2\pi \leqslant x \leqslant -\pi \\ (\pi, x - 2\pi) & \text{si } \pi \leqslant x \leqslant 2\pi \\ \left(\frac{2\pi^2}{x}, \sin(x)\right) & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-2\pi, 2\pi] \end{cases}.$$

La fonction σ est injective, et $\sigma(\mathbb{R})$ est une partie non fermée de $\mathbb{R}^2$. La fermeture Σ de $\sigma(\mathbb{R})$ s'obtient en rajoutant à $\sigma(\mathbb{R})$ le segment $[(0,-1),(0,1)]$. L'ensemble obtenu est appelé ***cercle de Varsovie***. C'est un compact, et si l'on identifie chaque point de $\mathbb{R}$ à son image par σ, Σ est un compactifié de $\mathbb{R}$. Nous noterons $\widehat{\mathbb{R}}$ ce compactifié de $\mathbb{R}$, et pour tout $\alpha \in [-1,1]$, nous noterons α_ω le point de $\widehat{\mathbb{R}}$ correspondant au point $(0,\alpha)$ de Σ.

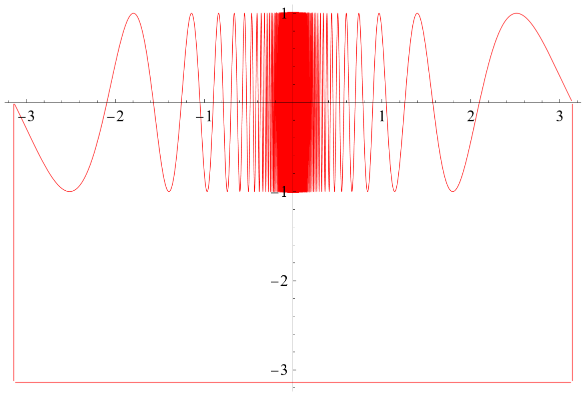

FIGURE 2 – Cercle de Varsovie

La distance δ sur Σ permet de définir une distance d sur $\mathbb{R}$ par $d(x,y) = \delta(\sigma(x), \sigma(y))$. Cette distance est compatible avec la topologie de $\mathbb{R}$, mais la structure uniforme induite est différente de la structure uniforme habituelle. En effet, pour cette structure, $\mathbb{R}$ n'est pas complet, car sinon, ce serait un fermé de $\widehat{\mathbb{R}}$. Voici une représentation d'un entourage que l'on obtient :

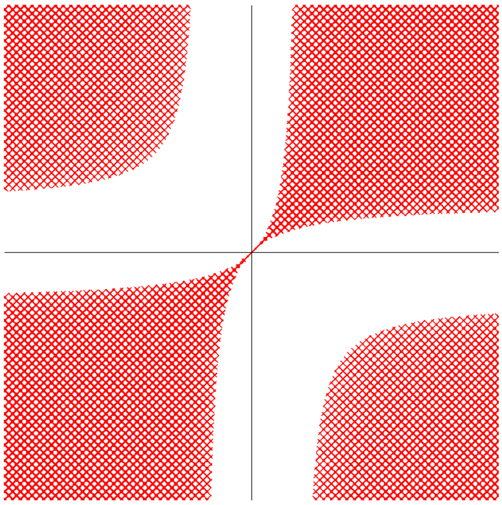

FIGURE 3 – Entourages du cercle de Varsovie

Les parties disjointes de cette figure s'expliquent par le fait qu'une suite peut tendre vers un point α_ω par les deux côtés : par des termes très grands et par des termes très petits (on ne peut pas parler ici de $+\infty$ ni de $-\infty$).
Soit $\alpha_\omega \in \widehat{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$. Une suite (x_n) de réels tend vers α_ω si $\left(\frac{2\pi^2}{x_n}, \sin(x_n)\right)$ tend vers $(0, \alpha)$. Donc, si (x_n) tend vers α_ω, $(\sin(x_n))$ tend vers α. Autrement dit, sinus se prolonge par continuité en α_ω en posant $\overline{\sin}(\alpha_\omega) = \alpha$. Comme on l'a vu (théorème 5 de l'article), ce prolongement par continuité est continu.
On a donc vu différents exemples de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ que l'on peut prolonger continûment à un compactifié de $\mathbb{R}$. Est-ce le cas pour toute fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?