REVUE DE LA FILIÈRE
MATHÉMATIQUES
RMS

Vous trouverez dans ce document des exercices posés aux oraux du concours Centrale en 2024 et dont la résolution demande l'usage de Python (épreuve II).

Centrale II (2024)

Centrale – MP -MPI – Python

1. Soit p un nombre premier impair. Un entier a est un carré modulo p s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a \equiv m^2$ $[p]$.

a) i) Écrire une fonction Python qui teste si l'entier p est premier.

ii) On s'intéresse aux nombres premiers de la forme $p = 12a + b$ avec $a < 1000$ et $b \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. À l'aide de Python, afficher les couples (p, b) pour lesquels 3 est carré modulo p.

Que remarque-t-on ? On suppose ce résultat toujours vrai.

iii) À l'aide de Python, afficher les entiers $n \in [\![1, 9999]\!]$ tels que $2^n - 1$ divise $3^n - 1$.

b) Soit $n \geqslant 2$ tel que $2^n - 1$ divise $3^n - 1$.

Montrer que n est impair.

c) i) Pour $x, y \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, on définit $x \sim y$ si et seulement si $x^2 = y^2$.

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Déterminer le cardinal d'une classe d'équivalence et en déduire celui de l'ensemble $\{x^2,\ x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*\}$.

ii) Montrer que, si $a \in \mathbb{Z}$ est carré modulo p tel que $a \wedge p = 1$, alors $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ $[p]$.

iii) En admettant que l'équation $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$ admet au plus $\dfrac{p-1}{2}$ solutions dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, déterminer le nombre exact de solutions de cette équation dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.

iv) Montrer que, pour $a \in \mathbb{Z}$ non multiple de p, $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ $[p]$ si a est carré modulo p et $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ $[p]$ sinon.

d) On suppose que p divise $2^n - 1$. Montrer que 3 est un carré modulo p.

2. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. On écrit $H_n = \frac{A_n}{B_n}$ et $S_n = \frac{C_n}{D_n}$ sous forme irréductible.
a) Calculer A_n, B_n, C_n, D_n pour n variant de 1 à 30.
b) Calculer le reste de la division euclidienne de A_{n-1} par n^2 pour n variant de 1 à 100. Que conjecturer ?
c) Calculer le reste de la division euclidienne de C_{n-1} par n pour n variant de 1 à 100. Que conjecturer ?
d) Calculer le reste de la division euclidienne de $\binom{2n-1}{n-1}$ par n^3 pour n variant de 1 à 100. Que conjecturer ?
Fixons désormais un nombre premier $p \geqslant 5$.
e) Démontrer que, pour k entier dans $[\![1, p-1]\!]$, $k^2 \equiv 1[p]$ si et seulement si k vaut 1 ou $p-1$.
f) En déduire que $(p-1)! \equiv -1[p]$.
g) Démontrer que p divise $\sum_{k=1}^{p-1} k^2$.

3. On pose $h : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$, $G_n : x \mapsto \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 - \left(\frac{kx}{n}\right)^2}$, $\alpha_n = G_n(1)$ et enfin $F_n : x \mapsto 2G_n(x) - h(x)$.
a) i) Coder la fonction F_n en PYTHON.
ii) Expliquer ce qu'est la recherche dichotomique de l'antécédent de $t \in [0, \alpha_n]$ par F_n, c'est-à-dire justifier qu'il existe deux suites $(a_k(n,t))$ et $(b_k(n,t))$ telles que

$$a_k(n,t) \leqslant F_n^{-1}(t) \leqslant b_k(n,t) \quad \text{et} \quad a_k(n,t) - b_k(n,t) = \frac{1}{2^k}.$$

On pose

$$k_d = \left\lfloor d \times \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \right\rfloor + 2, \quad n_d = 4 \times 10^d \quad \text{et} \quad \phi_d(t) = b_{k_d}(n_d, t).$$

iii) Coder la fonction ϕ_d en PYTHON.
b) On définit la fonction S_d impaire, $4\alpha_n$-périodique telle que S_d coïncide avec ϕ_d sur $[0, \alpha_n]$ et, pour tout $t \in]\alpha_n, 2\alpha_n]$, $S_d(t) = \phi_d(2\alpha_n - t)$.
i) Coder la fonction S_d en PYTHON.
ii) Afficher simultanément le graphe de S_3 et sin sur $[-2\pi, 2\pi]$. Que constatez-vous ?

4. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continues, décroissantes, non identiquement nulles et telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On pose

$$M = \sup_{f \in \mathcal{E}, x \in \mathbb{R}^+} \frac{x^2 \int_x^{+\infty} f}{\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

a) i) Montrer que $M \in [0, 1]$.

ii) À l'aide de PYTHON , conjecturer que $M \in [4/9, 1/2]$. On pourra considérer des fonctions de la forme $h_a = t \mapsto t^{-a}$ pour $t > 1$ et $h_a(t) = 1$ sinon, $t \mapsto e^{-at}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^a}$.

iii) À l'aide des fonctions h_a, montrer que $M \geqslant 4/9$.

b) On considère $G : x \mapsto \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $f \in \mathcal{E}$. Montrer que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} y\,G(y) = 0$.

5. ***a)*** Résoudre l'équation $y' + y = \mathrm{e}^x$.
b) Tracer la courbe représentative de $p : x \mapsto x\mathrm{e}^x$ et trouver graphiquement les antécédents de $\pm\mathrm{e}^{-1}$.
c) Montrer que p induit une bijection de $]-\infty, 1]$ sur un intervalle qu'on précisera. On note Φ sa réciproque.
d) On pose, pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} n^{n-1}\frac{x^n}{n!}$. Déterminer le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum n^{n-1}\frac{x^n}{n!}$ et tracer la courbe de $x \mapsto S_8(p(x))$ sur l'intervalle $[0, 1/3]$. La tracer sur l'intervalle $[0, 1]$. Le choix $N = 8$ est-il raisonnable ? Quelle conjecture peut-on émettre ?
e) i) Soient $\lambda > 0$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.
Résoudre : $(x' = \lambda x + y,\ y' = \lambda y)$ avec $x(0) = x_0,\ y(0) = y_0$.

ii) À l'aide de Φ, montrer que l'on peut écrire, pour t suffisamment grand, $y(t) = F(x(t))$ où F est une fonction indépendante de t.

f) i) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Calculer $f^{(m-1)}(0)$ où $f(t) = \dfrac{(\mathrm{e}^t-1)^m - (-1)^m}{m!}$.

ii) Résoudre $xy' - y = 0$ sur $]-R, R[$.

iii) Montrer que la famille $\left(\dfrac{(-1)^k n^{n+k-1} x^{n+k}}{n!k!}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est sommable pour $|x|$ assez petit. En sommant selon les paquets $I_m = \{(k,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*,\ k+n = m\}$, justifier la conjecture faite précédemment.

6. Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note q l'application $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \dfrac{X^TAX}{X^TBX}$.

a) i) Écrire une fonction `Q(A,B,X)` qui renvoie $q(X)$ et la tester avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de $B^{-1}A$.

ii) Construire une matrice M de taille 40×40 telle que $M_{i,j} = q(X_{i,j})$ avec $X_{i,j} = \begin{pmatrix} \dfrac{i}{40} \\ -\dfrac{j}{40} \end{pmatrix}$. Déterminer la plus grande et la plus petite valeur de M à l'aide des commandes `np.min` et `np.max`.

iii) Conjecturer les valeurs minimale et maximale prises par q.

b) i) Montrer que q est bien définie, bornée et qu'elle atteint ses bornes.

ii) Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B = M^2$.

iii) Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que pour $R = Q^T M$, $B = R^T R$ et $A = R^T DR$.

iv) En déduire que D est semblable à $B^{-1}A$ et trouver les bornes de q. Retrouver le résultat de ***a)***.

c) Pour $f, g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on pose $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$ et $T_g f = f \times g$. Soient $a : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $b : [0,1] \to \mathbb{R}^{+*}$ continues. On pose $q(f) = \dfrac{\langle T_a f, f\rangle}{\langle T_b f, f\rangle}$ pour tout $f \neq 0$.

i) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

ii) Montrer que q est définie et bornée.

iii) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que q atteigne ses bornes.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\mathrm{Per}(M) = \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\prod_{i=1}^n m_{\sigma(i),i}$ appelé permanent de M.

On note $\mathcal{U}_{n,m}$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\{0,1\}$ ayant exactement m coefficients égaux à 1, et $\mathcal{U}^*_{n,m}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{U}_{n,m}$ ayant au plus un coefficient non nul sur chaque ligne et chaque colonne.

On note enfin $M_{i,j}$ la matrice extraite de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en supprimant la ligne i et la colonne j.

a) Déterminer les cardinaux de $\mathcal{U}_{n,m}$ et $\mathcal{U}^*_{n,m}$.

b) i) Écrire une fonction PYTHON `SousMat(M,i,j)` qui renvoie la matrice $M_{i,j}$ extraite de M.

ii) Écrire une fonction PYTHON `Per(M)` qui calcule le permanent d'une matrice carrée M en admettant le résultat de la question ***c) iii)***.

iii) Pour $n \in [\![2, 7]\!]$, calculer $\mathrm{Per}(A_n)$ où A_n est la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients valent 1.

Faire une conjecture et la démontrer.

iv) Écrire une fonction PYTHON `Alea(n,m)` qui renvoie une matrice aléatoire de l'ensemble $\mathcal{U}_{n,m}$.

v) Écrire une fonction PYTHON `Test(M)` testant l'appartenance d'une matrice $M \in \mathcal{U}_{n,m}$ à l'ensemble $\mathcal{U}^*_{n,m}$.

c) i) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Per}(A) = \mathrm{Per}(A^T)$.

ii) Montrer que l'application $\varphi : (C_1, ..., C_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^n \mapsto \mathrm{Per}((C_1|...|C_n))$ est n-linéaire et symétrique.

iii) Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

Montrer que $\mathrm{Per}(M) = \displaystyle\sum_{k=1}^n m_{i,k}\mathrm{Per}(M_{i,k}) = \sum_{k=1}^n m_{k,j}\mathrm{Per}(M_{k,j})$.

Quel est l'analogue de cette formule en termes de déterminants ?

8. Soient $P = a_0 + \cdots + a_p X^p$ et $Q = b_0 + \cdots + b_q X^q$ dans $\mathbb{C}[X]$ avec $a_p b_q \neq 0$. On pose

$$S(P,Q) = \begin{pmatrix} a_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_q & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_p & \ddots & & \vdots & \vdots & b_q & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_0 & & & \ddots & 0 & \vdots & & & b_q \\ 0 & \ddots & & & a_p & b_0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{C}).$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{q \text{ colonnes}} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{p \text{ colonnes}}$$

a) Écrire une fonction PYTHON qui, pour deux polynômes P et Q, renvoie $S(P,Q)$ et $\det(S(P,Q))$.
b) On pose $P_1 = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$, $P_2 = X^3 - X^2 - 10X - 8$, $P_3 = X^3 - 4X^2 - X + 4$.
Que peut-on dire de P_1 et P_3, puis de P_2 et P_3, en ce qui concerne leurs racines ?
Tester la fonction précédente sur (P_1, P_2), (P_1, P_3) et (P_2, P_3).
Que peut-on conjecturer ?
c) On pose $E_n = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_0 = \{0\}$, et on définit l'application
$R : (U, V) \in E_q \times E_p \mapsto UP + VQ \in E_{p+q}$.
Montrer que R est bien définie et linéaire.
Calculer la matrice de R de $E_q \times E_p$ muni de la base $((1,0), ..., (X^{q-1}, 0), (0,1), ..., (0, X^{p-1}))$ dans E_{p+q} muni de la base canonique.
d) On note $\text{Res}(P,Q)$ le déterminant de la matrice précédente.
Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) R n'est pas un isomorphisme,
(ii) $\deg(\text{PGCD}(P,Q)) \geqslant 1$,
(iii) P et Q ont une racine commune,
(iv) $\text{Res}(P,Q) = 0$.
e) On suppose P constant. Montrer que $\text{Res}(P,Q) = a_0^q$.

9. Soient $\phi : x \mapsto e^{-x^2/2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $H_n : x \mapsto (-1)^n e^{x^2/2} \phi^{(n)}(x)$.
Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

a) On admet provisoirement que les H_n sont des fonctions polynomiales vérifiant la relation $H_{n+1} = XH_n - nH_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
i) Écrire une fonction PYTHON `H(n,x)` calculant $H_n(x)$.
ii) Afficher les courbes de H_n pour $n \in [\![0, 10]\!]$.
iii) Calculer efficacement la matrice $(\langle H_i, H_j \rangle)_{0 \leqslant i,j \leqslant 10}$.

En admettant que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, vérifier que la famille $(H_0, ..., H_{10})$ est orthogonale.
b) Justifier la convergence de l'intégrale définissant $\langle P, Q\rangle$ pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
c) Montrer la relation de récurrence vérifiée par la suite (H_n) admise en ***a)***.
d) Calculer $\langle H_n, H_0\rangle$ et montrer que la famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $H_n = \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ et $\widehat{H_n} = \mathcal{M}_n([-1,1])$, ainsi que $M_n = \max\det(H_n)$ et $\widehat{M_n} = \max\det(\widehat{H_n})$.
a) Justifier l'existence de M_n et $\widehat{M_n}$.
b) i) Écrire une fonction PYTHON `MaxiDetAlea(n)` calculant le déterminant maximal de 10000 matrices aléatoires de H_n et qui renvoie le maximum trouvé ainsi qu'une matrice en laquelle il est atteint.
ii) Procédér de même avec $\widehat{H_n}$.
iii) Les instructions suivantes renvoient un itérateur L parcourant tous les N-uplets d'éléments de $\{-1,1\}$:

```
from itertools import product
L=product([-1,1], repeat=N)
```

Écrire une fonction calculant M_n.
Soit $A \in H_n$. On pose $B = A^T A$.
c) i) Montrer que B est diagonalisable à valeurs propres positives, puis que $\det(B) \leqslant \left(\dfrac{\operatorname{tr}(B)}{n}\right)^n$.
ii) Montrer que $\det(A) \leqslant n^{n/2}$.
d) Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{n}}A$ est orthogonale si et seulement si $|\det(A)| = n^{n/2}$.

11. On admet l'existence et unicité de la suite de polynômes (A_n) vérifiant $A_0 = 1$, $A'_{n+1} = A_n$ et $\displaystyle\int_0^1 A_{n+1}(t)\mathrm{d}t = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $a_n = A_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
a) Calculer A_1, A_2 et A_3.
b) i) Écrire une fonction PYTHON `A(n)` qui renvoie le polynôme A_n.
À l'aide de PYTHON, conjecturer le comportement asymptotique de la suite (a_n).
ii) à l'aide de PYTHON, comparer $A_n(0)$ et $A_n(1)$ pour différentes valeurs de n. Conjecture ?
Comparer également $A_n(X)$ et $A_n(1-X)$ pour différentes valeurs de n. Conjecture ?
iii) Tracer sur un même graphe avec PYTHON les courbes des fonctions

$$\lambda \mapsto \frac{\lambda}{e^{-\lambda}-1} \quad \text{et} \quad \lambda \mapsto \sum_{n=0}^{N} a_n\lambda^n$$

pour $N \in [\![0,5]\!]$ sur l'intervalle $[-3,3]$. Conjecture ?
c) Démontrer la conjecture faite en ***b) ii)***. Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$.
d) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(1)-f(0)=\frac{f'(0)+f'(1)}{2}-\sum_{k=2}^{n}a_k(f^{(k)}(1)-f^{(k)}(0))+(-1)^n\int_0^1 A_n(t)f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

e) i) Montrer que $\forall x\in[0,1],\ |A_n(x)|\leqslant 1$.
Ind. On pourra montrer que $|\hat{A}_{n+1}(x)|\leqslant 1/2$ où $\hat{A}_{n+1}(x)=\displaystyle\int_{1/2}^{x}A_n(t)\mathrm{d}t$.
ii) Montrer la conjecture faite en ***b) iii)***.
Ind. On utilisera la question ***d)*** avec $f : x\mapsto e^{-\lambda x}$.

12. Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des X_k. On suppose que ces variables aléatoires ont toutes un moment d'ordre 2. On pose $S_N=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}X_k$.
a) i) Avec $a\leqslant b\in\mathbb{N}$, $\lambda>0$, $X_1\sim\mathcal{U}([\![a,b]\!])$ et $N\sim\mathcal{P}(\lambda)$, écrire une fonction PYTHON qui simule S_N.
ii) Vérifier avec PYTHON que $\mathbf{E}(S_N)=\mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X_1)$.
iii) Pour $\alpha<0<\beta$, on pose $T=\min\{k\in\mathbb{N}^*,\ S_k\leqslant\alpha \text{ ou } S_k\geqslant\beta\}$ en convenant que $T=0$ si $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $S_k\in]\alpha,\beta[$.
Dans le cas où $X_1\sim\mathcal{U}(\{-1,0,1\})$, écrire une fonction PYTHON simulant la variable T et l'utiliser pour vérifier que $\mathbf{E}(T)=\dfrac{3|\alpha\beta|}{2}$.
b) Montrer que $\forall t\in]-1,1[$, $G_{S_N}(t)=G_N(G_{X_1}(t))$.
c) Montrer que $\mathbf{E}(S_N)=\mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X_1)$.
d) On suppose X_1 bornée mais plus nécessairement à valeurs entières.
On admet que T est d'espérance finie, et on pose $S_T=\displaystyle\sum_{k=1}^{T}X_k$.
Justifier que S_T est d'espérance finie et que $\mathbf{E}(S_T)=\mathbf{E}(T)\mathbf{E}(X_1)$.
Ind. On montrera que $\mathbf{E}(S_T)=\mathbf{E}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}X_j(1-\mathbf{1}_{T<j})\right)$.

13. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre $1/2$, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Pour $N\in\mathbb{N}$, on pose $Y_N=2\displaystyle\sum_{n=0}^{N}a_nX_n$.
a) On suppose que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=\dfrac{1}{n+1}$.
i) Écrire une fonction PYTHON `Y(N)` simulant la variable aléatoire Y_N.
ii) Afficher le graphe des valeurs de la suite $(\mathbf{E}(Y_N^4)/\mathbf{E}(Y_N^2)^2)_{N\in\{10,20,30,\dots,500\}}$.
Conjecture ?
b) On revient désormais au cas général.

Montrer que

$$\mathbf{E}(Y_N^2) = \sum_{n=0}^{N} a_n^2 + \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)^2 .$$

c) Soit Z une variable aléatoire positive telle que Z^4 soit d'espérance finie.

i) Montrer que $\mathbf{E}(Z) \leqslant \sqrt{\mathbf{E}(Z^2)} \leqslant \mathbf{E}(Z^4)^{1/4}$.

ii) Montrer que $\mathbf{E}(Z^3) \leqslant \sqrt{\mathbf{E}(Z^2)\mathbf{E}(Z^4)}$ et en déduire que $\mathbf{E}(Z^3) \leqslant \mathbf{E}(Z^4)^{3/4}$.

iii) Montrer que, pour $c > 0$, $\mathbf{E}((Z+c)^4) \leqslant (\mathbf{E}(Z^4)^{1/4} + c)^4$.

14. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, on note $B_{k,n} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$.

a) Établir une relation de récurrence entre $B_{k,n}$, $B_{k-1,n-1}$ et $B_{k-1,n}$.

b) Donner un code récursif qui prend en argument n et renvoie la liste des $B_{k,n}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 B_{k,n}(t)\mathrm{d}t$ pour tous k et n.

d) Montrer que l'application T_n de $\mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui à f associe

$$T_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{k,n}(X)$$

est surjective.

15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k$.

a) On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

i) Calculer les dix premiers termes de la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour $X_0 = \dfrac{1}{15}A^T$. Comparer à A^{-1}.

ii) Même question que précédemment avec $X_0 = \dfrac{1}{14,5}A^T$.

iii) Montrer que $AA^T \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et que $14,5 \leqslant \rho(AA^T) \leqslant 15$.

b) Désormais, A désigne une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

i) Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $E_k = X_k - A^{-1}$. Exprimer E_{k+1} en fonction de E_k.

ii) Montrer que, pour $\| \; \|$ une norme d'algèbre, il existe $K \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :
$\forall k \in \mathbb{N}$, $\|X_{k+1} - A^{-1}\| \leqslant K\|X_k - A^{-1}\|$.

iii) Montrer que si $X_k \to A^{-1}$, alors $\rho(AX_0 - I_n) < 1$.

c) i) On admet provisoirement le résultat suivant : si $\rho(AX_0 - I_n) < 1$, alors $X_k \to A^{-1}$. Déterminer les $c > 0$ tels que, pour $X_0 = \dfrac{A^T}{c}$, on a $X_k \to A^{-1}$.

ii) Soit $\| \; \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et N la norme subordonnée. Pour $X_0 = \dfrac{A^T}{N(A)N({}^t\!A)}$, montrer que $X_k \to A^{-1}$.

16. ***a)*** Coder une fonction qui prend en argument un entier n et renvoie un permutation au hasard de S_n.
b) Coder un fonction qui prend en arguments deux matrices symétriques réelles A et B et renvoie la valeur du produit $\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\sigma(k)})$ où σ désigne une permutation tirée au hasard et $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ les valeurs propres de A et B respectivement.
c) On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 10 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 3 & 16 & 5 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

Comparer la valeur de $\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\sigma(k)})$ avec $\det(A+B)$. Existe-il une permutation σ telle que $\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\sigma(k)}) = \det(A+B)$?
d) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{tr}(ME_{i,j})$
e) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour toute matrice $T \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(MT) = 0$. Que peut-on dire de M ?
f) Soit A, $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui commutent. Montrer qu'il existe une permutation σ telle que

$$\det(A+B) = \prod_{k=1}^{n}(a_k + b_{\sigma(k)}).$$

Ind. On pourra montrer qu'il existe une base dans laquelle A et B sont simultanément diagonales.
g) On pose, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(M) = \{UMU^{-1},\ U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$. Montrer que $\mathcal{O}_n(M)$ est un compact. En déduire qu'il existe une matrice $B_0 \in \mathcal{O}_n(B)$ telle que

$$\det(A + B_0) = \sup_{C \in \mathcal{O}_n(B)} \det(A + C).$$

h) Soit $T \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exp(T) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
i) Soit $s \in \mathbb{R}$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $e^{sM} = I_n + sM + O(s^2)$.
j) Soit $s \in \mathbb{R}$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(I_n + sM) = 1 + \mathrm{tr}(M)s + O(s^2)$.

17. On pose $H_0 = I_n$ et, pour $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $H_u = I_n - 2\dfrac{uu^T}{u^Tu}$.
a) Montrer que, si $u \neq 0$, H_u est la matrice de la réflexion par rapport au plan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.
b) Montrer que toute réflexion est un H_u pour un certain u.
c) Programmer la fonction $u \mapsto H_u$.
d) Si $v \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Vect}(e_1)$ et $u = v - \|v\|e_1$, montrer que $H_u v = \|v\|e_1$.
Ind. Montrer que $H_u x = x - 2\dfrac{\langle u, x\rangle}{\|u\|^2}u$.
e) Montrer que, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ tels que $H_u A = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

f) Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure telles que $M = QR$.
g) Montrer que, pour tout $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$|\det(M)|^2 \leqslant \prod_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2.$$

18. Considérons les solutions positives de l'équation $\tan(x) = x$.
a) Montrer qu'il existe une infinité dénombrable de solutions et que l'on peut considérer la suite croissante (a_n) de ces solutions.
b) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $S : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ est 1 et déterminer sa limite en 1. Tracer la courbe représentative de S.
c) Montrer que $a_n = \alpha n + \beta + o(1)$ avec des constantes α et β que l'on calculera.
d) Soit $b_n = a_n - \alpha n - \beta$ pour tout n. Déterminer le rayon de convergence R' de la série entière $T : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$.
e) i) Montrer que la série de terme général $(-1)^n b_n$ est convergente.
ii) Montrer que T admet une limite en -1.
iii) Montrer que S admet une limite en -1 et $\lim_{x \to -1} S(x) = \lim_{x \to -1} T(x)$.

19. Pour $n \geqslant 1$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^1 \prod_{k=0}^{n-1} (t-k)\mathrm{d}t$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
a) i) Calculer les 10 premiers termes de la suite (a_n).
ii) Donner une conjecture de la limite de la suite (na_n).
iii) Conjecturer $\alpha \in [\![-4, 4]\!]$ tel que $|a_n| \sim \dfrac{1}{n \ln^{\alpha} n}$.
b) Montrer que le rayon de convergence de S, qu'on note R, est supérieur ou égal à 1.
c) Calculer $S(x)$ pour $|x| < 1$.
d) Montrer que $R = 1$ de deux manières différentes.
e) Pour $t \in [0, 1]$, on pose $u_1(t) = -\ln(1-t)$, pour $n \geqslant 2$,

$$u_n(t) = \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) - t \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

On note $h = \sum u_n$. Montrer que h est continue sur $[0, 1]$.
f) En déduire l'équivalent de $(|a_n|)$ conjecturé à la question ***a) iii)***.

20. Considérons la matrice $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![0,n]\!]}$ telle que $a_{i,i-1} = \dfrac{i}{n}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,i+1} = 1 - \dfrac{i}{n}$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, et $a_{i,j} = 0$ sinon.
a) Écrire une fonction prenant n en argument et renvoyant la matrice A correspondante. Faire une conjecture sur $\mathrm{Sp}(A)$ pour n grand.

On considère deux urnes et n boules numérotées de 1 à n, toutes initialement dans la première urne. À chaque étape on choisit au hasard un numéro et on change d'urne la boule correspondante. Soit X_k le nombre de boules dans la première urne après la k-ème étape.
b) Écrire une fonction qui simule cette expérience pour 4 boules et 100 étapes puis 100 boules et 1000 étapes. Conjecturer le comportement asymptotique de $(X_k)_k$.
c) Notons, pour tout k, $u_k = (\mathbf{P}(X_k = 0)\ \mathbf{P}(X_k = 1)\ \cdots\ \mathbf{P}(X_k = n))$. Exprimer u_{k+1} en fonction de u_k et A.
d) Soit f l'endomorphisme $P \mapsto XP - (X^2 - 1)P'$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
Soit λ une valeur propre de f, Q un vecteur propre associé, r et s les multiplicités de 1 et -1 dans Q. Montrer que $r + s = n$ et $\lambda = 2r - n$.

21. On a deux urnes U_1, U_2 et $2n$ jetons répartis entre les deux urnes. Initialement l'urne U_1 contient r jetons, avec r compris entre 0 et $2n$ fixé. On tire un numéro de jeton, s'il appartient à l'urne U_1, on le place dans l'urne U_2 et vice-versa. On note X_p la variable aléatoire qui donne le nombre de jetons contenu dans l'urne 1 après p tirages.
a) Réaliser une fonction `jeu(n,r,p)` qui renvoie X_p.
b) Calculer l'espérance de X_p pour $n = 9, r = 4$ et pour tous p allant de 100 à 200.
c) Tracer pour différents n et r, l'espérance de X_p en fonction de p pour p appartenant à $[0, 4n]$. Conjecture ?
d) Déterminer l'espérance de X_1.
e) Montrer que pour k appartenant à $[1, 2n-1]$, on a

$$\mathbf{P}(X_{p+1} = k) = \mathbf{P}(X_p = k-1)\frac{2n-k+1}{2n} + \mathbf{P}(X_p = k+1)\frac{k+1}{2n}.$$

Que peut-on dire pour $k = 0$ et $k = 2n$?
f) Montrer la relation entre les fonctions génératrices

$$G_{X_{p+1}}(s) = sG_{X_p}(s) + \frac{1-s^2}{2n}G'_{X_p}(s).$$

g) Calculer l'espérance de X_p. Conclure.

22. On cherche à modéliser l'évolution d'une population à travers les générations. Pour l'individu j de la génération n, on note $X_{j,n}$ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ représentant son nombre d'enfants. On note S_n la variable aléatoire correspondant au nombre d'individus de la génération n. On a $S_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{S_{n-1}} X_{j,n-1}$.
a) Écrire une fonction qui prend deux paramètres λ et n et qui renvoie une liste $[b_0, \dots, b_n]$ telle que b_i désigne le nombre d'individus de la génération i dans une simulation du processus. Tracer sur une même figure les résultats obtenus pour 15 expériences jusqu'à la génération 30 avec $\lambda = 0,9$. Que remarque-t-on ? Recommencer avec $\lambda = 1,1$.

b) Montrer :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P}(S_n = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-\lambda i} \frac{(i\lambda)^k}{k!} \mathbf{P}(S_{n-1} = i).$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et que $\mathbf{E}(S_n) = \lambda \mathbf{E}(S_{n-1})$. En déduire le comportement asymptotique de $(\mathbf{E}(S_n))$.
c) Notons φ la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ et, pour tout n, Φ_{S_n} la fonction génératrice de S_n. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_{S_n} = \Phi_{S_{n-1}} \circ \varphi$.
d) i) On note E l'événement « la lignée s'éteint » et E_n l'événement « la lignée s'éteint à la génération n ». On pose $u_n = \mathbf{P}(S_n = 0)$. Montrer la convergence de (u_n) et prouver que $\mathbf{P}(E) = \lim_{n \to +\infty} u_n$.
ii) Calculer u_0 et montrer que $u_n = \varphi(u_{n-1})$.

23. On pose

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 3a+b & -4a-b & 2a \\ 2a+b & -3a-b & 2a \\ b & -b & a \end{pmatrix}.$$

a) Coder une fonction renvoyant $M_{a,b}$. Calculer $M_{0,1}^2$, $M_{1,0}^2$, $M_{0,1}M_{1,0}$ et $M_{1,0}M_{0,1}$.
b) On note $\mathcal{F} = \{M_{a,b},\ (a,b) \in \mathbb{C}^2\}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel, déterminer sa dimension ainsi qu'une base.
c) L'ensemble $\mathcal{F}$ est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
d) Déterminer la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ contenant $\mathcal{F}$. Est-elle commutative ?
e) Calculer $M_{a,b}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
f) Donner une formule calculant $M_{a,b}^k$ en fonction des matrices précédentes. La vérifier avec PYTHON
g) Les matrices $M_{0,1}$, $M_{1,0}$ sont-elles diagonalisables ?

24. Soit $A : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) \mathrm{d}t$.
a) i) Montrer que $A(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.
Ind. On pourra faire une intégration par parties en écrivant $1 = \dfrac{t^2+x}{t^2+x}$.
ii) Tracer le graphe de A sur $]0,5]$ (utiliser l'expression trouvée à la question précédente). Que se passe-t-il si l'on fait la même chose sur $[-5,5]$?
b) On s'intéresse maintenant à l'existence de A sur $\mathbb{R}^{-*}$, c'est-à -dire à $A(-x)$ pour $x > 0$. On fixe donc $x > 0$ et l'on pose $P : t \mapsto \dfrac{t^3}{3} - xt$.
i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $a_n > 0$ tel que $P(a_n) = \dfrac{(2n+1)\pi}{2}$.
ii) Écrire une fonction `a(n,x)` renvoyant a_n. Vérifier avec PYTHON que $a_n \sim \sqrt[3]{3n\pi}$.

iii) Écrire une fonction `u(n,x)` renvoyant $u_n = \displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} \cos\left(\frac{t^3}{3} - xt\right) \mathrm{d}t$. Formuler une conjecture sur (u_n). Tracer le graphe de $t \mapsto \cos\left(\dfrac{t^3}{3} - xt\right)$ pour $x = 1$.
Que représente u_n pour cette fonction ?
iv) Montrer que $a_n \sim \sqrt[3]{3n\pi}$ et trouver un équivalent de $a_{n+1} - a_n$.
v) Démontrer la conjecture sur la suite (u_n).
vi) Montrer la convergence de la série $\sum u_n$ puis l'existence de $A(-x)$.

25. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Rademacher. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
La variable S_n modélise le gain d'un joueur jouant à pile ou face, gagnant 1 point lorsqu'il fait pile, en perdant 1 sinon. On s'intéresse à la durée pendant laquelle le gain est positif. On pose :

$$K_n = \mathrm{Card}\left(\{k \in \{1, \ldots, n\}\ ,\ S_{k-1} \geqslant 0 \text{ et } S_k \geqslant 0\}\right).$$

a) Coder une fonction `K(n)` renvoyant la valeur K_n.
On remarque qu'elle ne prend que des valeurs paires, ce que l'on admet par la suite.
b) Coder une fonction `occurences(nb, n)` qui simule `nb` fois le jeu pour $2n$ lancers et renvoie une liste `L` où `L[k]` est la proportion de simulations pour lesquelles $K_{2n} = 2k$. La tester pour `nb=2000` et `n=200`.
c) Tracer sur un même graphique `n`$\times$`L[k]` en fonction de `k/n` et la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ sur $]0, 1[$.
On admet que $\mathbf{P}(K_{2n} = 2k) = \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2k}{k}\dbinom{2n-2k}{n-k}$. Soient $0 < a < b < 1$.
d) Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{P}\left(a < \frac{K_{2n}}{2n} \leqslant b\right) = \sum_{k=\lfloor na \rfloor + 1}^{\lfloor nb \rfloor} \frac{1}{2^{2n}}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}.$$

e) Prouver que

$$\mathbf{P}\left(a < \frac{K_{2n}}{2n} \leqslant b\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n} \sum_{k=\lfloor na \rfloor + 1}^{\lfloor nb \rfloor} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)}}.$$

f) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(a < \frac{K_{2n}}{2n} \leqslant b\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

26. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Montrer la convergence de $\sum u_n$ et donner une approximation à 10^{-6} près de la somme.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \ln(2)$.

On réorganise les termes de la suite (u_n) sous le nom de (v_n) en prenant à la suite deux termes positifs et un terme négatif de sorte que les premiers termes de la suite v sont $v_0 = 1$, $v_1 = \dfrac{1}{3}$, $v_2 = -\dfrac{1}{2}$, $v_3 = \dfrac{1}{5}$, $v_4 = -\dfrac{1}{7}$, $v_5 = -\dfrac{1}{4}\dots$

c) Écrire la fonction $v(n)$ et donner les valeurs de $v(n)$ pour $n = 250, 251, 252$.

d) Soit $t_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} V_k$. Donner des approximations de t_n pour $n = 250, 251, 252$.

e) Examiner le rapport $\dfrac{S_n}{t_n}$ et énoncer une conjecture.

f) Prouver cette conjecture.

27. Soient $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-xt^3}\mathrm{d}t$ et $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(3n+1)(3n+2)}$.

a) i) Tracer le graphe de F sur $]-1;1[$.

ii) Tracer les graphes de S_2, S_5, S_8 et superposer les courbes (S_n étant la somme partielle de rang n associée à S). Que peut-on conjecturer ?

b) Montrer que F est définie et continue sur $[-1;1]$.

c) Démontrer la conjecture faite en ***a) ii)***.

d) Calculer $F(1)$ et $F(-1)$.

e) i) Montrer que F est dérivable sur $[-1;1[$.

ii) La fonction F est-elle dérivable en 1 ?

28. ***a)*** On considère l'équation différentielle $(E) :\ y''(t) + e^t y(t) = 0$.
Tracer les solutions de (E) pour des conditions initiales arbitraires. Que remarque-t-on ?

b) Pour $a \in \mathbb{R}$, soit $(E_a) :\ y''(t) + e^a y(t) = 0$.
Tracer la solution de (E_a) vérifiant $y(a) = 0$ et $y'(a) = 2$ pour $a \in \{10^{-1}, 1, 2\}$ et $t \in [a, 100]$. Que remarque-t-on ?

c) Montrer que, pour tout $t > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que que y admette un unique zéro sur $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[$.

d) Montrer que les solutions de (E_a) sont de la forme $g_{A,B}(t) = A\sin(e^{\frac{a}{2}}t + B)$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

e) On pose $y_a = g_{1,1-a}$ et $W(t) = y(t)y_a'(t) - y'(t)y_a(t)$. Montrer que W est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $W'(t)$.

29. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne canonique.
On considère l'équation différentielle $(1) :\ \Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ où Φ est une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ et A une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On admet que, pour tout $(t_0, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, il existe une unique solution de (1) vérifiant $\Phi(t_0) = X_0$.

a) Vérifier ce résultat avec $t_0 = 0$ dans les deux cas suivants :

i) A est constante avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

ii) $A : t \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{2t}{1+t^2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1+t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
- pour toute solution Φ de (1), $\|\Phi\|$ est constante,
- pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est antisymétrique.

30. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
On pose $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X-a)(X-b)P'(X) - nXP(X)$.
a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Écrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
b) Écrire une fonction `matrice(n,a,b)` qui renvoie la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Écrire une fonction `propre(n,a,b)` qui renvoie les valeurs propres et les vecteurs propres de M.
c) Déterminer les éléments propres de f pour $n = 2, a = 1, b = 0$ et $n = 2, a = 2, b = 1$.
d) La matrice M est elle diagonalisable ?

Centrale – PSI – PYTHON

31. Notons A_k la $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A et u l'application linéaire qui à A associe B définie par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad B_i = \sum_{k=1}^{n} A_k - A_i = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} A_k.$$

a) Écrire une fonction en PYTHON qui renvoie l'image d'une matrice par u.
b) À l'aide du script, évaluer u pour $n=2$ et $n=3$. L'endomorphisme u est-il un automorphisme ?
c) Déterminer la nature géométrique de u ainsi que ses éléments caractéristiques pour $n=2$.
d) Exprimer $\det(u(A))$ en fonction de $\det(A)$.
e) Déterminer un polynôme annulateur de u de degré 2.
f) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
g) Soit J la matrice dont les coefficients valent tous 1. On pose $U = J - I_n$.
Exprimer les colonnes de AU. Qu'en concluez-vous ?

32. Soit $(E)\ : (1+x^2)y'' + xy' - \dfrac{y}{4} = 0$.
a) i) Justifier qu'il existe une unique fonction y solution de (E) vérifiant $y(0) = \sqrt{3}$ et $y'(0) = 0$.
ii) Compléter ce code

```
def f(x,t) :
    return np.array(...)
    T=np.arange(0,1,0.01)
    X=integr.odeint(...)
    plt.plot(T,X)
    T=np.arange(-1,0,0.01)
    X=integr.odeint(...)
    plt.plot(T,X)
```

b) i) Trouver toutes les solutions de (E) DSE sur $]-1,1[$.
ii) Montrer que toute solution de (E) est développable en série entière.
iii) En déduire une deuxième façon de tracer le graphe en ***a) ii)*** .
c) i) Si h est une solution de (E), déterminer l'équation différentielle vérifiée par $g = h \circ \operatorname{sh}$.
ii) En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

33. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \arctan(n+1) - \arctan(n)$. Pour $x \in [0, \pi/2]$, on pose

$$\varepsilon_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0,\pi/4[\\ 1 \text{ si } x \in [\pi/4,\pi/2] \end{cases} \quad \text{et, pour } n \in \mathbb{N}^*,\ \varepsilon_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k(x) u_k + u_n > x \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

a) i) Écrire une fonction PYTHON traçant une ligne polygonale reliant les points $M_k = (k, u_k)$ pour $k \in [\![1, 50]\!]$. Conjecture ?

ii) Écrire une fonction PYTHON d'argument x et N renvoyant $(\varepsilon_0(x),\dots,\varepsilon_N(x))$ et $\sum_{k=0}^{N}\varepsilon_k(x)u_k$. Tester cette fonction pour $x=0$ et $N=20$, $x=\pi/2$ et $N=20$, $x=1$ et $N=20$. Observations et conjecture ?

b) i) Étudier la monotonie de (u_n) et sa convergence éventuelle.

ii) Donner un équivalent de u_n.

c) i) Étudier la convergence de la série $\sum \varepsilon_n(x)u_n$.

ii) On note $S : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0}\varepsilon_n(x)u_n$. Montrer que $0\leqslant S(x)\leqslant \pi/2$ pour $0\leqslant x\leqslant \pi/2$.

iii) Montrer que cet encadrement est optimal.

34. Pour $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on note $P_n(x)=x\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x}{k}\right)$.

a) i) Écrire une fonction PYTHON qui renvoie $P_n(x)$.

ii) Tracer P_n pour $x\in[0,1]$ pour n allant de 1 à 10 sur un même graphe. Établir une conjecture sur la suite (P_n).

iii) Écrire une fonction $\mathrm{Max}(n)$ qui renvoie x_n tel que $P_n(x_n)=\max_{x\in[0,1]}P_n(x)$.

iv) Écrire une liste qui donne $x_n\ln(n)$ pour $n=10^i$ avec $i\in[\![1,5]\!]$.

b) i) Justifier que P_n admet un maximum global sur $[0,1]$.

ii) Démontrer que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant\frac{1}{x_n}\leqslant\frac{1}{1-x_n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

iii) En déduire un équivalent de x_n.

35. ***a)*** Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)$. Déterminer une valeur décimale approchée des u_n pour $n\in[\![1,10]\!]$ et des u_{10^k} pour $k\in[\![1,4]\!]$.
Proposer une conjecture quant à la convergence de la suite (u_n).

b) Pour $t\in]0,\pi[$, on définit $f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2t}{t^2-n^2\pi^2}$ et $g(t)=\frac{\cos(t)}{\sin(t)}-\frac{1}{t}$.

i) Tracer le graphe de f et de g. Émettre une conjecture admise pour la suite.

ii) Déterminer la limite de g en 0.

iii) Montrer que f et g sont continues sur $[0,\pi[$.

c) Trouver $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

Ind. Calculer $G(x)=\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ de deux façons différentes.

d) En déduire $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

e) La fonction f est-elle intégrable sur $]0,\pi[$?

36. Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $S_{n,m}$ le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,m]\!]$ si $n \geqslant 1$ et $S_{0,m} = 0$. On pose $S_m(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n,m} \dfrac{z^n}{n!}$.
a) Calculer $S_{n,m}$ si $m = 1$, si $n = m$ et si $n < m$.
b) En majorant simplement $S_{n,m}$, montrer que la série entière S_m a un rayon de convergence égal à $+\infty$.
c) Montrer que $S_{n,m+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S_{n-k,m}$. En déduire que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} S_{n,m} \frac{z^n}{n!} = (e^z - 1)^m.$$

d) Calculer les valeurs de $(S_{10,m})_{m \in [\![1,10]\!]}$ à l'aide de PYTHON.
e) Montrer que $S_{n,m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} k^n (-1)^{m-k}$.

37. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $f(x) = x^3 + x$.
a) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Tracer f et f^{-1} sur $[-2, 2]$.
b) Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 0$, $a_{n+2} = \dfrac{-27n^2 + 3}{4(n+2)(n+1)} a_n$.
On note $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Tracer f^{-1}, S_5 et S_{10} sur $[-1/2, 1/2]$.
c) Soit y la solution de $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (27x^2 + 4)y''(x) + 27xy'(x) - 3y(x) = 0.$$

Justifier l'existence d'une unique solution y. Tracer y et f^{-1}. Conjecture ?
d) Démontrer la conjecture précédente.

38. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on note $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dfrac{1}{(n-x)^2}$.
a) i) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
ii) Montrer que f est 1-périodique.
iii) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
iv) Tracer le graphe de f sur $[10,1; 10,9]$.
b) On note $g(x) = f(x) - \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$.
i) Montrer que g se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$.
ii) Tracer le graphe de g avec PYTHON (faire varier les sommes partielles définissant f).
iii) En déduire une valeur de $f(x)$.
iv) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

39. Soient

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \Sigma_{n,k} : \left\{ \begin{array}{ccc} 2x_0 & = & x_{n-k}+2 \\ 2x_1 & = & x_{n-k+1}+2 \\ \vdots & & \\ 2x_{k-1} & = & x_{n-1}+2 \\ 2x_k & = & x_0 \\ \vdots & & \\ 2x_{n-1} & = & x_{n-k-1}. \end{array} \right.$$

a) Donner sans justification l'expression de J^k. Déterminer le spectre de J et en déduire celui de J^k.
b) On note $A_{n,k}$ la matrice associée au système $\Sigma_{n,k}$. Écrire $A_{n,k}$ en fonction de I_n et J^k. En déduire que $\Sigma_{n,k}$ possède une unique solution notée $(x_0^{(n,k)}, \dots, x_{n-1}^{(n,k)})$.
c) À l'aide de PYTHON , déterminer cette solution pour $(n, k) = (6, 1)$ et $(n, k) = (6, 4)$.
d) Montrer que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ $x_i^{(n,k)} = \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-\lfloor (nj+i)/k \rfloor}$ puis vérifier cette relation sur PYTHON pour $(n, k) = (6, 1)$ et $(n, k) = (6, 4)$.

40. Soient $\lambda > 0$, Y une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, n un entier $> \lambda$ et S_n une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$.
a) i) Écrire une fonction qui calcule $\mathbf{E}(f(Y))$ (prenant comme argument une fonction f, un réel $\varepsilon > 0$ et un réel $\lambda > 0$) en l'approximant à $\varepsilon \times \|f\|_\infty$ près.
ii) Écrire une fonction de paramètres f, λ, n qui calcule $\mathbf{E}(f(S_n))$.
iii) Afficher $\mathbf{E}(f(S_n))$ en fonction de n pour $n \in [\![3, 100]\!]$, $\lambda = 2$ et $f\ : x \mapsto e^{-x}$. Comparer à $\mathbf{E}(f(Y))$ à 10^{-4} près. Faire de même pour $f\ : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Établir une conjecture.
b) Soient X, Y deux variables aléatoires entières et $A \subset \mathbb{N}$. Montrer que

$$|\mathbf{P}(Y \in A) - \mathbf{P}(X \in A)| \leqslant \mathbf{P}(X \neq Y).$$

41. ***a)*** On cherche à modéliser la trajectoire d'un objet mobile par (E_α) :

$$(x''(t) = -\alpha x'(t),\ y''(t) = -\alpha y'(t) - 1)$$

avec $x(0) = y(0) = 0$ et $x'(0) = y'(0) = \nu > 0$. Tracer la trajectoire obtenue pour différents α (on pourra utiliser `odeint`).
b) Déterminer une solution de (E_α). En déduire que l'on peut écrire la trajectoire comme image de la courbe paramétrée

$$x \mapsto \left(x, \left(1 + \frac{1}{\alpha\nu}\right) x + \frac{1}{\alpha^2} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{\nu} x\right) \right).$$

c) Montrer que $g\ : x \mapsto x + \ln(1-x)$ réalise une bijection de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}^-$.
En déduire qu'il existe un unique ν_α tel que la trajectoire passe par le point $(1, 0)$.

42. On note $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et on rappelle que $R_1 = \pi^2/6$. L'objectif de cet exercice est de trouver des réels C et D optimaux tels que $\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{n-C} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n-D}$.

a) i) Programmer une fonction $\mathrm{Reste}(N)$ qui renvoie une valeur approchée de R_N.

ii) Programmer une fonction $\mathrm{Recherche}(C(N))$ qui renvoie le C optimal tel que $\frac{1}{n-C} \leqslant R_n$ pour tout $n \in [\![1, N]\!]$.

iii) Programmer une fonction $\mathrm{Recherche}(D(N))$ qui renvoie le D optimal tel que $R_n \leqslant \frac{1}{n-D}$ pour tout $n \in [\![1, N]\!]$.

iv) Tracer le graphe de ces deux fonctions. Conjecture ?

b) i) Montrer que R_n est bien défini.

ii) Montrer que $\frac{1}{n} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n-1}$ pour tout $n \geqslant 2$.

iii) Montrer que $C \geqslant 0$.

c) Montrer que $\psi\ : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

d) On pose $F(x) = x - \frac{1}{\psi(x)}$ et $G(x) = \psi^2(x) + \psi'(x)$.

i) Déterminer la limite de G en $+\infty$.

ii) Étudier la fonction F.

iii) En déduire la valeur de C.

43. Soit $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ une fonction intégrable. Soit f une solution du problème de Cauchy

$$(y'' + (1+q)y = 0,\ y(0) = a,\ y'(0) = b)\,.$$

a) Écrire une fonction $\mathrm{trace}(a, b, u, v, q)$ qui trace une solution sur l'intervalle $[u, v]$. Conjecture ?

Soit $z\ : x \mapsto f(x) + \int_0^x \sin(x-t)q(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Déterminer $z'' + z$.

c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant |f(x)| \leqslant |a| + |b| + \int_0^x |q(t)f(t)|\,\mathrm{d}t$.

d) En déduire que f est bornée.

44. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on définit

$$\Phi(f) : x \in \mathbb{R}\ \mapsto\ \int_0^{+\infty} \arctan(tx)\frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b) Montrer que, pour tout $f \in E$, $\Phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c) Soit f_0 la fonction constante égale à 1 et soit $g = \Phi(f_0)$.

i) Tracer le graphe de g sur $[0, 5]$. Conjecturer la limite de g en $+\infty$.

ii) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

iii) Calculer $g(x) + g(1/x)$ (on pourra s'aider d'un graphe à l'aide de PYTHON).

iv) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

45. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de diviseurs de n, $D_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_k$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Programmer D_n et H_n.

b) Dénombrer le nombre de couples d'entiers naturels se situant sous la courbe d'équation $xy = n$.

En déduire que $D_n = nH_n + O(n)$ puis un équivalent de D_n.

c) Pour $x \in]-1, 1[$, calculer $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n}$, $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} H_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} nH_n x^n$.

d) Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{1 - x^n}$ converge simplement sur $]-1, 1[$ et que sa somme est une fonction continue.

e) En déduire un équivalent de $x \mapsto \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} d_n x^n$ lorsque x tend vers 1.

46. Soit $I : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^x}$.

a) Déterminer le domaine de définition de I.

b) Tracer I sur $]1, 30[$. A priori, quelles sont les variations de I et la limite en $+\infty$?

c) Avec PYTHON, calculer $I(2)$ à l'aide de la méthode des rectangles. Comparer à la valeur exacte de $I(2)$.

d) Montrer que $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

e) Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer le signe de I'.

f) Déterminer les limites de I en 1 et en $+\infty$.

g) Tracer le graphe de $x \mapsto 1 - 2\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2 x^2 - 1}$ et comparer ce graphe à celui de I.

h) Démontrer l'observation faite précédemment.

47. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, on note $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.

a) Tracer f sur $]0, 1[$ et sur $]1, 3]$.

b) i) Justifier que f est bien définie.

ii) Pour $x \in]1, 2[$, montrer que $x \ln(2) \leqslant f(x) \leqslant x^2 \ln(2)$.

iii) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 1 et que la fonction prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

iv) Étudier la position relative de la courbe représentative de f par rapport à la tangente en 1.

v) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

48. Un candidat est convoqué à un endroit et il y a deux chemins A et B. Il prend le chemin A avec une probabilité p, sinon il prend le chemin B. Une fois le chemin choisi, son temps de trajet suit une loi de Poisson de paramètre a pour le chemin A, b pour le chemin B. On note T la variable aléatoire égale au temps de trajet en minutes.
a) Justifier que $T(\Omega) = \mathbb{N}$.
b) i) Écrire une fonction renvoyant T en fonction de p, a et b.
ii) Donner la valeur moyenne de T pour $a = 5$, $b = 10$ et $p \in \{1/4, 1/2, 3/4\}$ avec $N = 500$ trajets.
Justifier la décroissance de cette valeur moyenne lorsque p augmente.
c) i) Donner la loi de T, sa fonction génératrice, son espérance et sa variance.
ii) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une majoration du nombre de trajets à effectuer pour que la moyenne empirique soit proche de $\mathbf{E}(T)$ à 30 secondes près avec une probabilité supérieure à $0,95$.
d) Une amie attend le candidat à l'arrivée pendant un certain temps τ depuis le départ du candidat, ce temps τ suivant une loi de Poisson de paramètre c.
Si l'amie est là quand le candidat arrive, on dit qu'il y a rencontre. On note R la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a rencontre, 0 sinon.
i) Écrire une fonction qui renvoie R en fonction de p, a, b et c.
ii) Donner la valeur moyenne de T pour $a = 5$, $b = c = 10$ et $p \in \{1/4, 1/2, 3/4\}$ avec $N = 500$ trajets.

49. On définit la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 0}$ sur $[0, 1]$ par

$$\forall x \in [0, 1],\ u_0(x) = 1,\ u_1(x) = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2}(x) = u_{n+1}(x) + x^n u_n(x).$$

a) Écrire une fonction PYTHON $\mathrm{suite}(n, x)$ renvoyant $u_n(x)$. La complexité doit être en $O(n)$.
Retourner $\mathrm{suite}(10; 0,5)$ et $\mathrm{suite}(10; 0,5)$
b) i) Tracer l'évolution de $x \mapsto u_n(x)$ pour $n \in [\![0, 10]\!]$ et superposer les courbes.
ii) Conjecturer la monotonie de $x \mapsto u_n(x)$ à n fixé.
iii) Conjecturer la monotonie de $(u_n(x))_{n\geqslant 0}$ à x fixé.
iv) Prouver ces conjectures.
c) i) Démontrer une inégalité entre e^x et $1 + x$.
ii) En déduire que $\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in [0, 1],\ u_n(x) \leqslant \exp\left(\sum_{k=0}^{n-2} x^k\right)$.
iii) En déduire que la suite de fonctions (u_n) converge simplement sur $[0, 1[$ et que la fonction limite est continue sur $[0, 1[$.
iv) Que peut-on dire de la suite $(u_n(1))_{n\geqslant 0}$?

50. ***a)*** Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/n & 1/n \\ 1/n & 1 & 1/n \\ 1/n & 1/n & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Écrire un code PYTHON renvoyant A_n en prenant en argument n. Écrire un code PYTHON renvoyant les valeurs propres de ${A_n}^n$ pour $n \in [\![5, 10]\!]$.
c) Diagonaliser A_n et établir $A_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} {A_n}^n$. Vérifier avec PYTHON.
Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ et $A_{n,m} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, les autres à $1/n$.
d) Exprimer $A_{n,m}$ en fonction de I_m, J_m et n, où J_m désigne la matrice de taille m dont tous les coefficients sont égaux à 1.
e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} ({A_{n,m}}^n)$ comme combinaison linéaire de I_m et J_m.

51. ***a)*** Écrire une fonction $\text{appliquer}(f, M)$ prenant en argument une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et une matrice carrée diagonalisable que l'on peut écrire $M = P\,\text{Diag}(a_1, \ldots, a_n)P^{-1}$ et renvoyant une matrice que l'on peut écrire sous la forme $P\,\text{Diag}(f(a_1), \ldots, f(a_n))P^{-1}$.
b) Tester avec $f : x \mapsto x^2$, $M = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et comparer avec M^2.
c) Écrire une fonction prenant en argument une matrice diagonalisable M et un entier N et renvoyant

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} M^{2k+1}.$$

Tester avec la même matrice que précédemment et $N = 9$.
Comparer avec la fonction $\text{appliquer}(f, M)$ avec une fonction f bien choisie.
d) i) Soit $M = P\,\text{Diag}(a_1, \ldots, a_n)P^{-1}$. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à

$$P\,\text{Diag}(f(a_1), \ldots, f(a_n))P^{-1}.$$

Montrer que, pour toute valeur propre λ de M, on a $u_{|E_\lambda(M)} = f(\lambda)\,\text{id}_{E_\lambda(M)}$.
ii) On suppose que $P\,\text{Diag}(a_1, \ldots, a_n)P^{-1} = Q\,\text{Diag}(b_1, \ldots, b_n)Q^{-1}$.
Montrer que $P\,\text{Diag}(f(a_1), \ldots, f(a_n))P^{-1} = Q\,\text{Diag}(f(b_1), \ldots, f(b_n))Q^{-1}$.
e) i) Soient $M_k = \begin{pmatrix} 1/k & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N_k = \begin{pmatrix} -1/k & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M_k et N_k sont diagonalisables.
ii) Soit $f : x \mapsto |x|$. Comparer $f(M_k)$ et $f(N_k)$.

52. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \mapsto f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.
a) Tracer le graphe de f_n pour diverses valeurs de n. Conjecture ?
b) Étudier la convergence simple/uniforme de la suite (f_n).
c) Montrer que $\forall x \in [0, 1]$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x)$.
d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) \leqslant e^x$.
e) Montrer que, pour tout $0 \leqslant a < b < +\infty$, $\|f_n - \exp\|_{\infty,[a,b]} = O(1/n)$.

53. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs propres simples $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction et si P est un polynôme vérifiant $P(\lambda_i) = f(\lambda_i)$ pour tout i, on pose $f(A) = P(A)$.

On utilisera from scipy.interpolate importe si : $P = \text{si.lagrange}([a,b],[c,d])$ renvoie un polynôme P vérifiant $P(a) = c$ et $P(b) = d$.

a) i) Écrire une fonction qui teste si A est à valeurs propres simples.

ii) Écrire une fonction d'argument P et A qui renvoie $P(A)$.

iii) Écrire une fonction $\text{image}(f, A)$ qui renvoie $f(A) = P(A)$.

b) i) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A et B sont à valeurs propres simples.

ii) Écrire une fonction $S(N, M)$ qui renvoie $S_N(M) = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} \frac{M^i}{i!}$.

c) i) Justifier que $f(A)$ ne dépend pas du choix de P.

ii) Justifier qu'il existe un polynôme P de degré $< n$ qui convient.

d) i) On note $\pi_i(X)$ le i-ième polynôme interpolateur de Lagrange associé aux λ_j. Montrer que $\pi_i(A)$ est la matrice d'un projecteur et que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \pi_i(A) = I_n$.

ii) Montrer que $f(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)\pi_i(A)$.

54. Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$A_0 = A \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad A_{k+1} = \frac{1}{2}\left(A_k + (A_k^{-1})^T\right).$$

a) On se donne $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ explicite.

i) On pose $M = A^T A$. Diagonaliser M.

ii) Trouver $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $S^2 = M$.

iii) Déterminer A_5 et A_6. Conjecture ?

b) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $S^2 = A^T A$.

i) En déduire qu'il existe $(\Omega, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = \Omega S$.

ii) Montrer l'unicité de S.

iii) Étudier la convergence de la suite (A_k) définie en préambule.

55. On pose $f_p \,:\, x \mapsto \dfrac{(-1)^p}{(p+x)p!}$ et $S \,:\, x \mapsto \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} f_p(x)$.

a) i) Écrire une fonction $\text{somme}(n, x)$ qui renvoie $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} f_p(x)$.

ii) Justifier que si $\dfrac{1}{(n+2)!} \leqslant \varepsilon$ alors $\text{somme}(n, 1)$ renvoie $S(1)$ à ε près.

iii) En déduire une valeur de $S(1)$ à 10^{-7} près.

iv) Calculer $S(1)$ et vérifier le résultat.

v) Étudier la convergence simple de $\sum f_p$.

b) i) Faire une conjecture sur $xS(x) - S(x+1)$. La prouver.

ii) Étudier la continuité de S.
iii) Déterminer un développement asymptotique de $S(n)$ à l'ordre 2.

Centrale - PC - Python

56. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ suivant la loi uniforme. On admet pour le moment que le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$ vaut

$$S_{n,k} = \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} \ell^n.$$

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $T(P) = P(X+1)$.
a) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner sa matrice dans la base canonique.
b) Montrer que T est un automorphisme et donner la matrice de T^{-1} dans la base canonique.
c) Déterminer $\mathbf{P}(\mathrm{card}\{X_1, \ldots, X_n\} = 1)$.
d) Déterminer $\mathbf{P}(\mathrm{card}\{X_1, \ldots, X_n\} = n)$.
e) Coder la fonction `Surj(n,k)` qui donne la valeur de $S_{n,k}$.
f) On fixe $N = 10^5$ et $n = 10$. Tracer les graphes de $k \in [\![1, n]\!] \mapsto \dfrac{\binom{n}{k} S_{n,k}}{n^n}$. Tracer également le graphe de la moyenne de N simulations de $k \mapsto \mathbf{1}_{\{\mathrm{card}(X_1, \ldots X_n) = k\}}$. Que conjecturer ?
g) Démontrer la conjecture.
h) Montrer que $k^n = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} S_{n,\ell}$.
i) En déduire l'expression donnée en début d'énoncé de $S_{n,k}$.

57. La matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad a_{i,j} > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = 1.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stochastique.
a) Montrer que 1 est valeur propre de A et de A^T . Montrer que, si λ est valeur propre de A, alors $|\lambda| \leqslant 1$.
b) Soit $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

c) Montrer que 1 est la seule valeur propre de module $\geqslant 1$ de A.
d) Sachant que `rd.randint`$(1, 1000, n)$ renvoie une liste de n entiers aléatoires entre 1 et 1000, écrire une fonction `ligne(n)` qui donne une liste de taille n de coefficients positifs dont la somme vaut 1
e) Écrire une fonction `geneint(n)` renvoyant 10 matrices stochastiques de taille n aléatoires. Vérifier que 1 est bien valeur propre de ces matrices stochastiques. Conjecturer la dimension du sous-espace propre associé à 1.
f) Pour A stochastique donnée de taille 2, afficher A^{20} et A^{30}. Conjecturer la limite de A^n.

g) Soit V un vecteur propre associé à 1 pour A^T . Calculer $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{j,i}|v_j| - \sum_{k=1}^{n} v_k$. En déduire que les coefficients de V sont tous non nuls, et que $|V|$ est un vecteur propre associé à 1 de A^T.
h) Soient A et B deux matrices stochastiques. Que dire de AB ?
i) À l'aide de ***g)*** démontrer la conjecture faite en ***f)***.

58. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $X_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = X_0 + \cdots + X_n$.
a) Donner les 5 premières lignes du triangle de Pascal.
b) Étudier le sens de variation de la suite finie $\left(\dbinom{2n}{k}\right)_{0\leqslant k\leqslant 2n}$.
c) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$.
d) Écrire une fonction informatique `f(b)` qui prend en argument un entier `b` $\in \mathbb{N}$ et qui renvoie le premier instant n tel que $S_n = b$. La fonction renverra `-1` si cela ne se produit jamais.
e) Écrire une fonction `moyenne(b, nb_exp)` qui calcule la moyenne des valeurs de `f(b)` observées au cours de `nb_exp` expériences. Que peut-on conjecturer ?
f) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.
g) Pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbf{P}(S_{2n} = 0)$ puis $\mathbf{P}(S_{2n} = k)$.

59. Soit $\alpha > -\dfrac{1}{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$P_n(X) = \prod_{k=1}^{n}(X + k) \quad \text{et} \quad f_\alpha : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}\, n!\, P_n(\alpha)}.$$

On considère également l'ensemble S_α des fonctions deux fois dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ xf''(x) + (2\alpha + 1)f'(x) + xf(x) = 0.$$

a) Montrer que f_α est bien définie et que $f_\alpha \in S_\alpha$.
b) Trouver toutes les fonctions appartenant à S_α.
c) On définit une fonction g_α en posant $g_\alpha : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 (1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \cos(xt)\,\mathrm{d}t$. Déterminer l'ensemble de définition de g_α.
d) Tracer le graphe de $x \mapsto \dfrac{g_\alpha(x)}{f_\alpha(x)\, g_\alpha(0)}$ pour $\alpha \in \{0.25,\ 0.5,\ 1,\ 10\}$.
e) Tracer sur un même graphe g_α et f_α pour les valeurs précédentes de α. Commenter.

60. Pour x réel et $n \in \mathbb{N}$ tel que cela soit défini, on pose :

$$F(x) = \int_0^\pi \frac{\sin(xt)}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(x, n) = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{x^2 + (n\pi + u)^2}\,\mathrm{d}u.$$

a) Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est continue.
b) Représenter le graphe de la fonction F sur $[\,0\,;20\,]$. Conjecturer le comportement asymptotique de F en $+\infty$.
c) Démontrer la conjecture précédente quand x tend vers $+\infty$.
d) Pour $x>0$, montrer que $F(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n G(x,n)$. En déduire le signe de $F(x)$ pour $x>0$.
e) Pour $\varepsilon>0$ et $x>0$, trouver un entier N tel que

$$\left|F(x)-x\sum_{n=0}^{N}(-1)^n G(x,n)\right|\leqslant\varepsilon.$$

f) Écrire un programme qui renvoie une valeur numérique approchée de N/ε.

61. Pour $n\geqslant 2$, on définit

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}\quad\text{ et }\quad J_n=\int_0^1\frac{1+t^{n-2}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que I_n est bien défini pour $n\geqslant 2$.
b) Calculer I_2 et I_3. On pourra vérifier l'égalité

$$\forall t\geqslant 0,\qquad \frac{1}{1+t^3}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2t-1}{1-t+t^2}+\frac{2}{\frac{4}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1}\right].$$

c) Afficher les valeurs de I_n pour $2\leqslant n\leqslant 20$. Que peut-on conjecturer sur une éventuelle limite ℓ de la suite (I_n) ?
d) Démontrer la conjecture précédente et déterminer la valeur de ℓ.
e) Représenter graphiquement $(\ln(n),\ln(I_n-\ell))_{n\in[\![2\,;\,20]\!]}$. Que peut-on conjecturer ?
f) Montrer que J_n est bien définie pour $n\geqslant 2$.
g) Afficher les valeurs de I_n et J_n pour $2\leqslant n\leqslant 9$. Que peut-on conjecturer ?
h) Démontrer la conjecture précédente.
i) En déduire que $I_n-\ell=o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ avec α un entier à préciser.
j) Montrer que $\sum(I_n-\ell)$ converge.
k) On approxime les restes de la série par les quantités $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n^2}(I_k-\ell)$. Sur l'ordinateur, tracer graphiquement $(10n,10nR_{10n})_{2\leqslant n\leqslant 10}$. Que peut-on conjecturer ?

62. Lorsque c'est possible, on pose :

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x},\quad f_n(x)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{-x}{n}\right)^k,\quad f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = (-1)^n \dfrac{\zeta(n)}{n}$. Soit $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$. On note R le rayon de convergence de S.

a) Déterminer les ensembles de définition de ζ et des fonctions f_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Pour $x > 1$, montrer que $1 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{x-1}\cdot$

c) Déterminer le rayon de convergence R. Y a-t-il convergence en $x = -R$?

d) Tracer graphiquement $\left(\displaystyle\sum_{n=2}^{N} a_n R^n\right)_{N \in [\![2\,;\,100]\!]}$. Que peut-on conjecturer sur la convergence de la série entière au point $x = R$?

e) Démontrer la conjecture.

f) Programmer une fonction `S(x)` qui renvoie la somme partielle d'indice 100 de la série entière $\sum a_n x^n$. On considérera qu'il s'agit d'une bonne approximation de la somme $S(x)$. Tracer sur le même graphe les fonctions S et f sur l'intervalle $]-1\,;1]$. Que peut-on conjecturer ?

g) Exprimer $f_n(x)$ avec des fonctions usuelles. En déduire l'ensemble de définition de f.

63. Soient $x_0, \ldots, x_n$ des réels distincts et, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $P_k = \displaystyle\prod_{j \neq k} \left(\dfrac{X - x_j}{x_k - x_j}\right)$.

a) Calculer $P_k(x_j)$ pour $0 \leqslant j, k \leqslant n$.

b) Montrer que les P_k forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Écrire une fonction `maximum` qui prend en argument un polynôme Q et une liste d'entiers relatifs $x_0, \ldots, x_n$ et qui renvoie le réel $M = \max\{|Q(x_k)|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$.

d) Tester avec $Q = X^4 - 2X^3 - X^2 + X + 1$ et la liste $[-1, 0, 1, 2, 3]$.

e) Tester avec le même polynôme mais d'autres listes de 5 entiers.

f) Comparer les différentes valeurs de M avec $\dfrac{4!}{2^4}$.

g) On revient au cas général. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$.

h) Soit $m \in [\![1, n]\!]$. On pose $S_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^m P_k(0)$. Calculer S_m.

i) Soit $x_0, \ldots, x_n$ des entiers rangés par ordre strictement croissant. Soit $y_k = \displaystyle\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)$. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire et $M = \max\{|Q(x_k)|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$. Montrer que $|y_k| \geqslant k!(n-k)!$ et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{Q(x_k)}{y_k} = 1$.

j) En déduire que $M \geqslant \dfrac{n!}{2^n}$.

k) Soit maintenant $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $Q - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$ a au moins $n + 1$ racines.

64. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. On considère l'ensemble V des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $au_{n+p} + bu_{n+p-1} + bu_{n+1} + au_n = 0$.
a) Montrer que V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
b) Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$. Montrer qu'il existe une unique suite $u \in V$ telle que $u_0 = a_0$, $u_1 = a_1, \dots, u_{p-1} = a_{p-1}$. En déduire la dimension de V.
c) Trouver les racines de $P_1 = X^5 + X^4 + X + 1$. Trouver alors une base de V lorsque $p = 5$ et $a = b = 1$.
d) Trouver une base de V lorsque $a = b = 2024$ et $p = 6$.
e) Dans le module `np.random`, la fonction `np.randint(a,b)` renvoie uniformément un nombre entre a et $b - 1$.
f) Définir une fonction `Ualea(n)` qui renvoie le terme u_n de la suite $u \in V$ sachant que $(u_0, \dots, u_5)$ prennent des valeurs aléatoires entre 1 et 100.
g) Tracer $k \mapsto u(k)$ pour $1300 \leqslant k \leqslant 1320$.
h) Conjecturer la limite de (u_n).

65. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de taille n.

Pour $1 \leqslant \ell \leqslant n$, on note $X_\ell = \begin{pmatrix} \sin\left(\dfrac{\ell\pi}{n+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\dfrac{\ell n\pi}{n+1}\right) \end{pmatrix}$. On note P la matrice de colonnes $X_1, \dots, X_n$. Pour $p, q \in \mathbb{Z}$, on note

$$T_q = \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{qk\pi}{n+1}\right) \quad \text{et} \quad S_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{pk\pi}{n+1}\right)\sin\left(\frac{qk\pi}{n+1}\right).$$

a) Calculer T_1.
b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Que dire des sous-espaces propres ?
c) Donner un script calculant $A(n)$.
d) Un script est donné pour calculer P. Donner un script qui donne $P^{-1}AP$.
e) Énoncer une conjecture sur le cardinal du spectre de A et une autre sur la nature de P.
f) En admettant cette conjecture, calculer $S_{p,q}$ pour $p \neq q$.
g) Calculer T_p pour $p \in \mathbb{Z}$.
h) Calculer $S_{p,q}$ y compris dans le cas $p = q$.
i) Prouver la conjecture sur le cardinal du spectre de A puis sur P.

66. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $W_n = \left(\omega_n^{kl}\right)_{0\leqslant k,l\leqslant n-1}$ et $V_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} W_n$.
a) Calculer $\det(W_n)$ puis $\det(V_n)$.
b) Calculer V_n^2, $V_n\overline{V_n}$ puis V_n^4.

c) Coder `V(n)` et tester pour $n = 4$.
d) Coder `Spectre(n)` qui renvoie le spectre de V_n. Conjecturer le nombre de valeurs propres de V_n.
e) Démontrer la conjecture.